

Un esempio concreto realizzato da Liuba e Antonio: "La gara delle derivate!": la derivata e i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione in una trave inflessa per esplorare il legame tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata prima.

Descriviamo ora i passaggi salienti di un'attività laboratoriale che abbiamo realizzato e sperimentato in classe insieme: la maggior parte delle lezioni è stata svolta in compresenza.

Realizzazione dell'attività. Descrizione del contesto.

L'attività laboratoriale in oggetto è stata proposta ad una **classe** quarta istituto tecnico ad indirizzo meccanica mecatronica.

Il **periodo di svolgimento** ha coinvolto il secondo quadrimestre, nel corso del quale sono state impiegate **cinque lezioni di un'ora ciascuna**.

Relativamente ad entrambe le discipline coinvolte, gli allievi dispongono dei principali **prerequisiti** necessari per affrontare proficuamente l'attività.

Svolgimento dettagliato.

Derivate e travi inflesse.

Si propongono tre casi di sollecitazioni applicate ad una trave isostatica:

1. applicazione di carichi concentrati;
2. applicazione di carichi uniformemente distribuiti;
3. applicazione di carichi distribuiti triangolari.

Caso 1 e caso 2:

Nel primo (vedi Figura 1) e nel secondo caso (vedi figura 2) si mostreranno i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione soffermandosi, in particolare, sulle rappresentazioni grafiche relative a taglio e momento: si domanderà agli allievi di quali oggetti matematici si tratti e si attenderà che i discenti riconoscano che si tratti di grafici di funzioni. L'insegnante guiderà la classe in una riflessione sulle variabili indipendenti e dipendenti presenti nei casi esaminati.

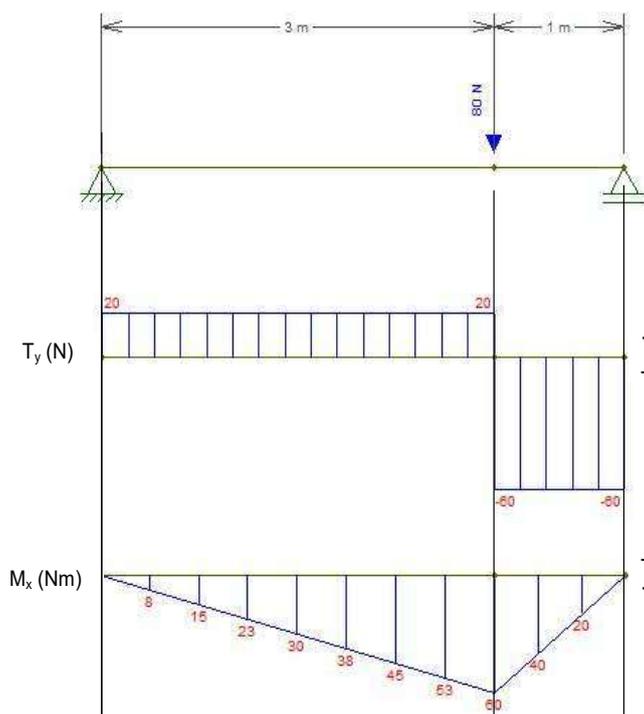


Figura 1: esempio di trave isostatica soggetta a carichi concentrati.

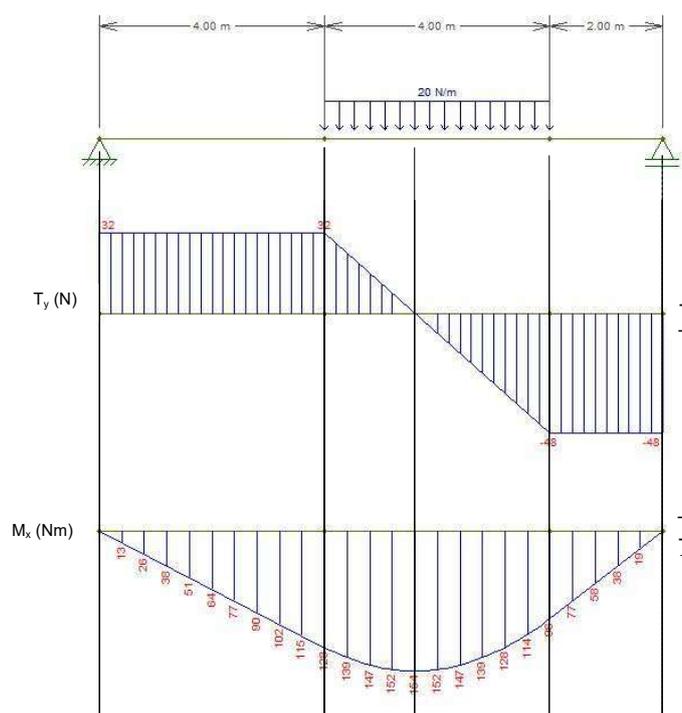


Figura 2: esempio di trave isostatica soggetta a carichi uniformemente distribuiti.

Si chiederà, poi, agli allievi, di individuare quale particolare tipologia di funzione viene rappresentata in ogni tratto del diagramma e, quindi, di provare a costruirne l'equazione.

I principali quesiti da rivolgere alla classe potranno essere i seguenti:

- Quali funzioni sono rappresentate nei grafici proposti?
- Quali equazioni possono rappresentare le funzioni coinvolte?

Dopo le riflessioni descritte, si potrà, ad esempio, proporre agli allievi, di costruire autonomamente, a partire dalle condizioni di carico, le equazioni che descrivono le caratteristiche di sollecitazione agenti sulla struttura (in Figura 3 sono riportate le condizioni di carico relative alla Figura 1, mentre in Figura 4 sono riportate le condizioni di carico relative alla Figura 2): in questo modo è possibile rendere ancora più efficace il carattere interdisciplinare dell'attività laboratoriale in oggetto, sviluppando contemporaneamente un'attività di consolidamento/approfondimento delle discipline matematica e meccanica.

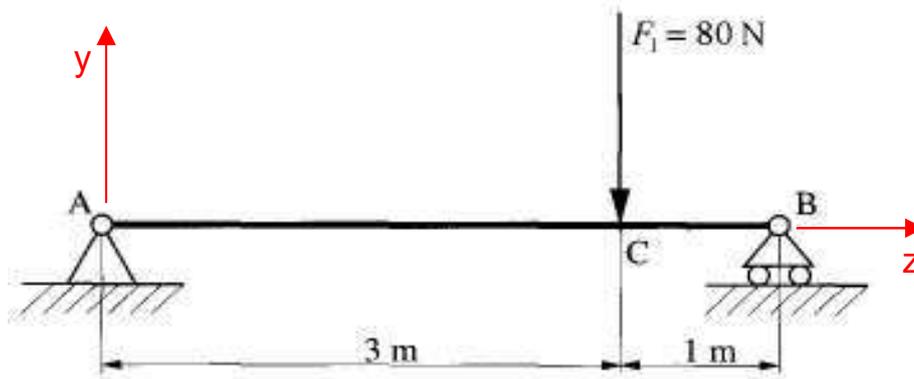


Figura 3: dati relativi alla Figura 1.

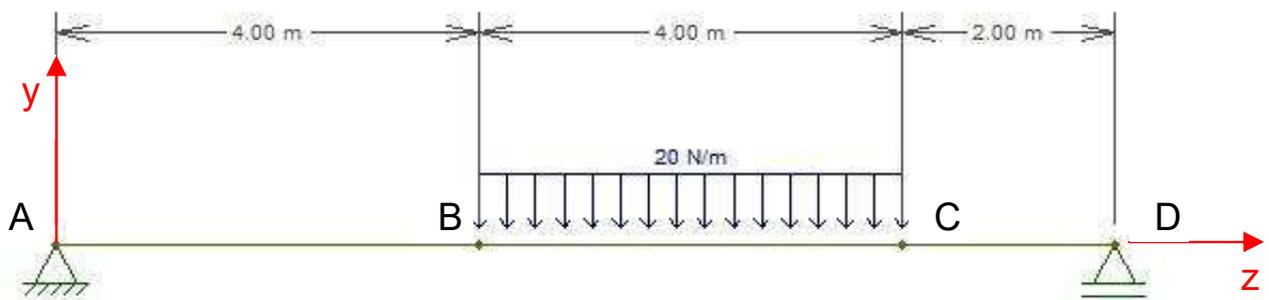


Figura 4: dati relativi alla Figura 2.

A questo punto si domanderà alla classe, a partire dagli strumenti a loro disposizione per analizzare una funzione (con particolare riferimento al calcolo del dominio e dei relativi limiti, allo studio della continuità, all'utilizzo della derivata prima per la determinazione degli intervalli di monotonia, degli estremi relativi e dei punti di non derivabilità) di elaborare congetture al fine di individuare il legame esistente tra le caratteristiche di sollecitazione momento flettente e taglio.

L'insegnante potrà guidare gli allievi nella costruzione della risposta corretta allo stimolo proposto facendoli, ad esempio, soffermare sul grado delle funzioni polinomiali (lineari, lineari affini e quadratiche) che rappresentano taglio e momento sul medesimo tratto di struttura.

I principali quesiti da rivolgere alla classe potranno essere i seguenti:

- Osservando, in particolare, il grado delle funzioni polinomiali coinvolte, quale legame si può riscontrare tra il grado di un tratto di funzione relativa al momento e quello relativo al corrispondente tratto appartenente al grafico del taglio?
- Quale operatore matematico, se applicato ad una funzione polinomiale, consente di far diminuire il grado di un'unità?

A questo si arriverà ad intuire che **il taglio costituisce la derivata del momento flettente** al variare dell'ascissa e, a partire dalle equazioni rappresentanti le caratteristiche di sollecitazione in oggetto, sarà possibile verificare algebricamente la correttezza dell'intuizione colta dalla classe. Le conclusioni possono essere raggiunte anche tramite un approccio intuitivo e non formale.

Poiché, come sopra esposto, in una prima fase, agli allievi vengono mostrati soltanto i grafici di taglio e momento, mantenendone celate le relative equazioni in funzione dell'ascissa, successivamente, viene richiesto ai discenti, a partire dalle condizioni di carico e dai dati relativi alla struttura, di costruire autonomamente le funzioni che rappresentano taglio e momento.

In alternativa, si possono mostrare agli allievi le equazioni rappresentate da tali grafici.

Una volta ottenute le equazioni corrispondenti a taglio e momento, si potrà chiedere ai discenti di provare a calcolare la derivata prima del momento al variare dell'ascissa per arrivare a verificare che la derivata del momento corrisponde il taglio.

Ricordando ipotesi e tesi del teorema di Fermat, è, a questo punto, possibile chiarire agli allievi il significato matematico profondo dell'affermazione spesso utilizzata in Meccanica: “quando il momento è massimo o minimo il taglio è nullo”, così utile, ad esempio, nel controllo della correttezza nello svolgimento di un esercizio.

Caso 3:

Relativamente al terzo caso (vedi Figura 5): a partire dal grafico del taglio, si domanda, innanzitutto, agli allievi di provare a dedurre l'equazione. Si chiede, quindi, alla classe di riflettere sulla possibilità di ricavare, a partire solamente dall'equazione del taglio (senza conoscere i vincoli e le condizioni di carico alle quali è soggetta la trave), “l'” equazione del relativo momento: in questo modo, guidando i discenti nel ragionare sul fatto che ad una funzione data corrisponde un'unica derivata mentre una certa funzione

può rappresentare la derivata di differenti (infinite) funzioni, è possibile introdurre il concetto di integrale indefinito.

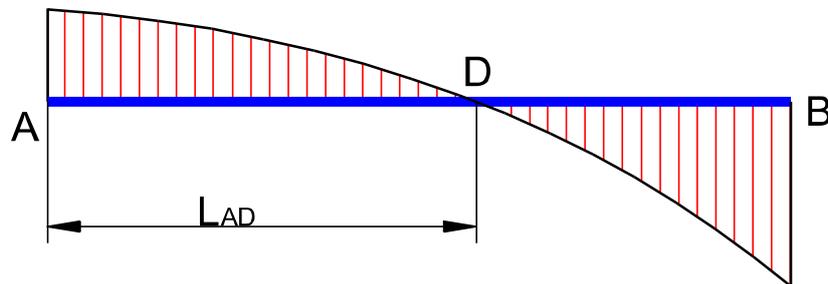


Figura 5: diagramma del taglio in una trave isostatica soggetta a carichi distribuiti a forma triangolare.

Mostrando alla classe le particolari condizioni di carico e i vincoli ai quali la trave è soggetta (vedi Figura 6), è possibile proporre di risolvere la trave costruendo l'equazione del momento ed il relativo diagramma (vedi Figura 7).

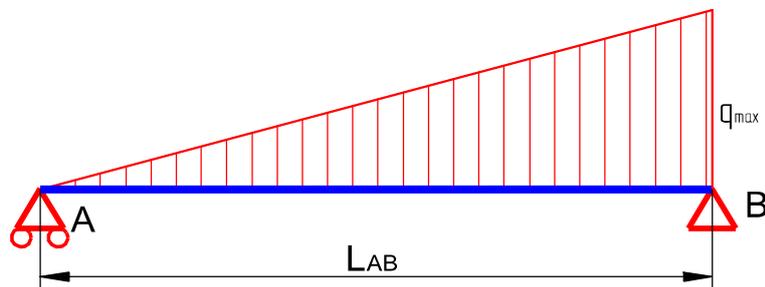


Figura 6: dati relativi alla Figura 5.

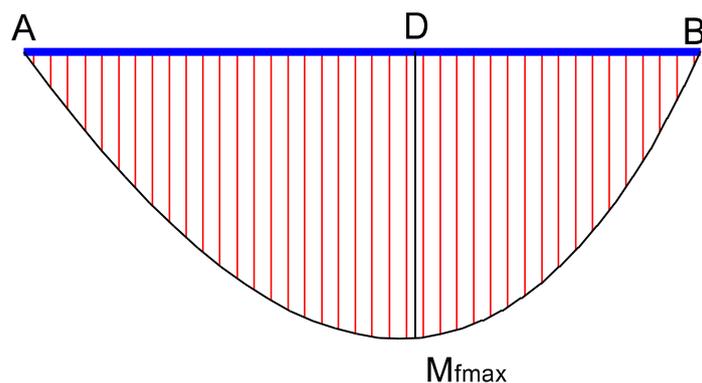


Figura 7: diagramma del momento in una trave isostatica soggetta a carichi distribuiti a forma triangolare.

La gara.

La classe, composta da 20 allievi, è stata suddivisa in 7 gruppi di cui 5 contenenti 4 elementi e 2 contenenti 3 elementi.

Ciascun gruppo ha ricevuto un mazzetto contenente 120 grafici numerati da 1 a 120 (vedi Figura 9) ed è stato proposto di elencare le coppie presenti che riportino il grafico di una funzione e quello della relativa derivata.

L'attività è stata presentata sotto forma di una gara tra i vari gruppi allestiti: appena completata l'analisi dei grafici a disposizione, i gruppi dovranno comunicare all'insegnante il numero totale di coppie individuate.

Verrà quindi stilata e mantenuta aggiornata la classifica dei gruppi in funzione del numero di coppie riconosciute.

I grafici distribuiti agli allievi non contenevano solamente coppie funzione - derivata. Tra di essi, sono stati inclusi oggetti matematici non corrispondenti a funzioni o funzioni prive della controparte derivata.

Si è cercato di realizzare un numero di grafici sufficientemente elevato.

Tutte le scelte operate sono state effettuate per far ragionare gli allievi il più possibile sul profondo legame presente tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata: essi non potevano procedere, ad esempio, per esclusione.

Appena osservate le 120 figure a loro disposizione, gli allievi hanno subito riconosciuto i grafici che non rappresentavano funzioni e hanno poi osservato la presenza di più funzioni

corrispondenti alla stessa derivata. I casi individuati sono stati analizzati e commentati (vedi Figura 10).

In particolare, è interessante e proficuo proporre alla classe una riflessione sul fatto che ad una funzione data corrisponde un'unica derivata mentre una certa funzione può rappresentare la derivata di differenti (infinite) funzioni. A partire dalle osservazioni esposte, come già precedentemente osservato, è possibile introdurre il concetto di primitiva di una funzione e di integrale indefinito.

Analizzando il problema dal punto di vista algebrico, si può partire da un esempio semplice di funzione la cui derivata è nota, chiedendo poi agli allievi se quella è l'unica funzione corrispondente alla derivata individuata o se si possono costruire altre funzioni essendo certi di ottenere da esse la medesima derivata.

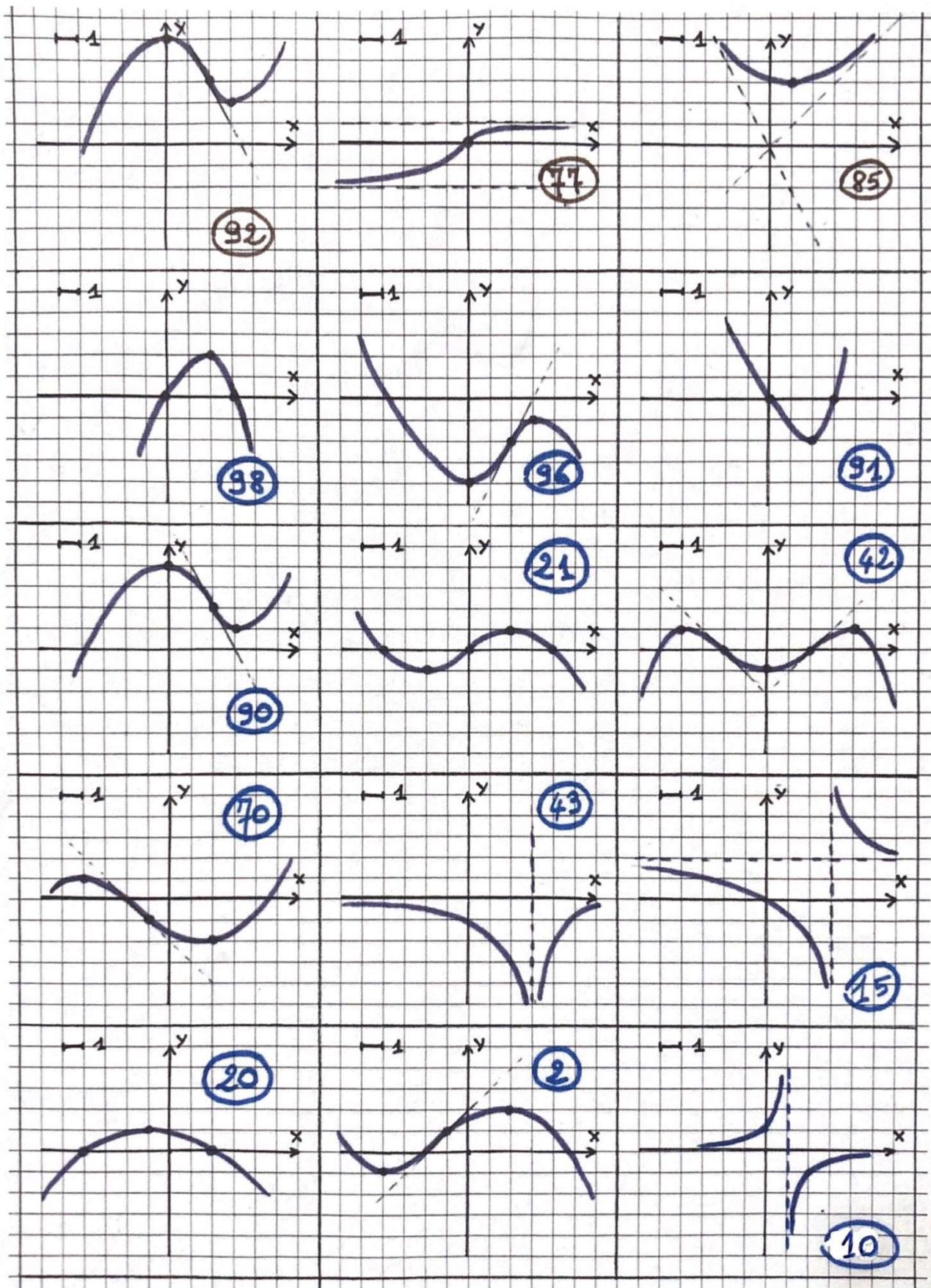


Figura 8: alcuni dei 120 grafici utilizzati per la gara a gruppi.

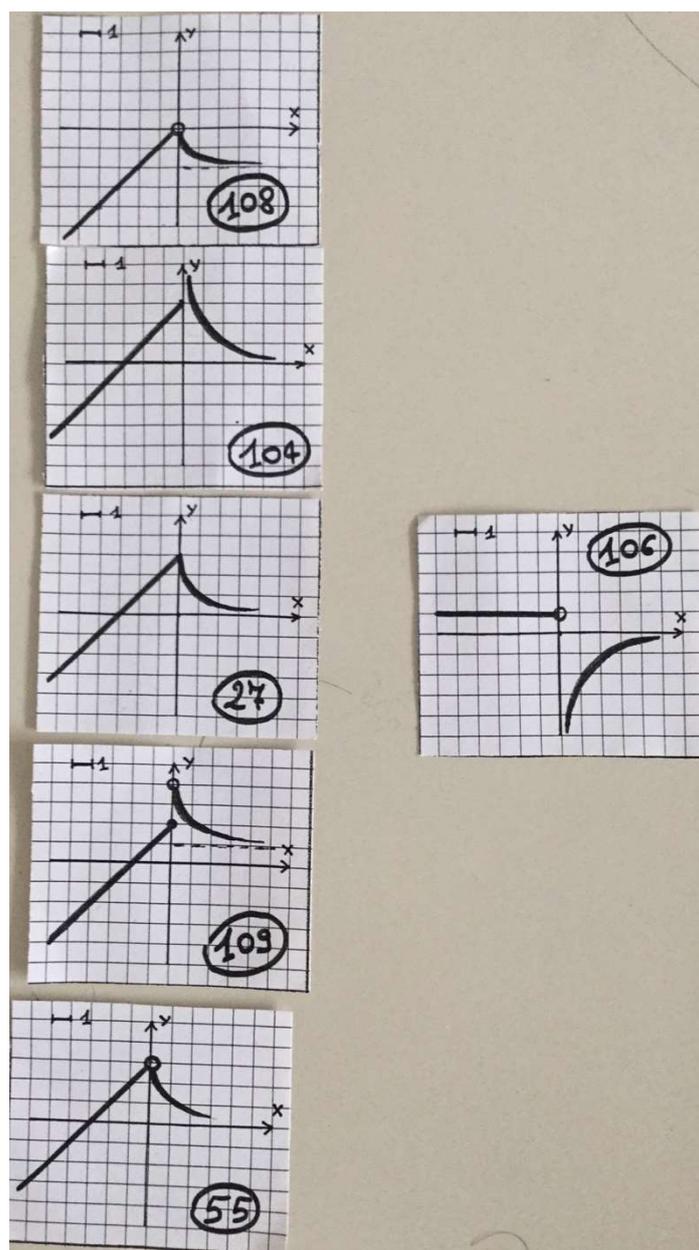


Figura 9: esempio di più funzioni corrispondenti alla stessa derivata.

Conclusioni.

L'attività è stata accolta con curiosità ed interesse: la classe, nel suo complesso, ha partecipato attivamente alle lezioni, proponendo osservazioni e commenti, formulando congetture e discutendo serenamente le differenti scelte operate.

Alcune intuizioni sono state colte, inizialmente, soltanto da pochi studenti, ma questi ultimi hanno poi trainato tutta la classe verso la corretta risoluzione del problema,

realizzando un buon lavoro di peer tutoring che ha permesso anche ai più deboli di acquisire le conoscenze e competenze richieste.

Gli allievi si sono dimostrati, in generale, coinvolti attivamente durante le lezioni, creando un clima costruttivo di collaborazione, confronto e competizione.

Bibliografia e sitografia.

- appunti del corso di Meccanica del prof. Antonio Briatore, I.I.S. “G. Vallauri”, Fossano (CN)
- “Scienza delle costruzioni”, Odone, Belluzzi, Ed. Zanichelli, 1966
- <http://www.carmnap.it/FilePdf/Trave%20%20Appoggiata%20%20con%20carico%20triangolare.pdf>
- https://seieditrice.com/progettazione-costruzioni-impianti/files/2012/04/7_4_3_esercizi_svolti.pdf